

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ ΙΙ (Λ-Ω)

16 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2020

Όνοματεπώνυμο:

Αριθμός Μητρώου:

Θέμα 1. [10] Αν $\kappa, \mu, \nu \in \mathbb{R}$, να βρεθεί το ελάχιστο πολυώνυμο του πίνακα πραγματικών αριθμών

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ \kappa & 2 & 0 \\ 0 & \mu & \nu \end{pmatrix}$$

και να προσδιοριστούν οι τιμές των κ, μ, ν για τις οποίες ο A είναι διαγωνοποιήσιμος.

Θέμα 2. [10] Στον Ευκλείδειο χώρο των στηλών \mathbb{R}_n θεωρούμε ένα μοναδιαίο διάνυσμα στήλη X , και έστω ο πίνακας $A = X \cdot {}^t X$.

Να βρεθεί το ελάχιστο πολυώνυμο του A και να εξεταστεί αν ο πίνακας A είναι διαγωνοποιήσιμος. Στην περίπτωση κατά την οποία ο πίνακας A είναι διαγωνοποιήσιμος, να βρεθεί η διαγώνια μορφή του.

Θέμα 3. [10] Να βρεθούν όλοι οι συμμετρικοί 2×2 πίνακες πραγματικών αριθμών A για τους οποίους γνωρίζουμε ότι: $\text{Tr}(A) = 5$, $|A| = 6$ και το διάνυσμα στήλη $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ είναι ιδιοδιάνυσμα του A .

Θέμα 4. [10] Έστω A ένας 3×3 ορθογώνιος πίνακας πραγματικών αριθμών με θετική ορίζουσα. Υποθέτουμε ότι ο μιγαδικός αριθμός $(-1 + i\sqrt{3})/2$ είναι ιδιοτιμή του A . Να βρεθεί ο πίνακας A^{2020} . Ποιά είναι η κανονική μορφή του A και ποιά είναι η γεωμετρική ερμηνεία του;

Θέμα 5. [10] Έστω A και B δύο ορθογώνιοι $n \times n$ πίνακες πραγματικών αριθμών. Αν $|A| + |B| = 0$, να δειχθεί ότι: $|A + B| = 0$. Ισχύει το αντίστροφο; Αν $|A| + |B| = 0$, ποιά είναι η ορίζουσα του $A - B$;

Θέμα 6. 1. [10] Θεωρούμε τον Ευκλείδειο χώρο $(M_3(\mathbb{R}), \langle \cdot, \cdot \rangle)$, όπου $\langle \cdot, \cdot \rangle$ είναι το συνηθισμένο εσωτερικό γινόμενο του $M_3(\mathbb{R})$. Αν $\mathcal{E} = \{A \in M_3(\mathbb{R}) \mid {}^t A = -A\}$, να βρεθεί μια ορθοκανονική βάση του Ευκλείδειου χώρου $(\mathcal{E}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

2. [10] Να δειχθεί ότι η απεικόνιση

$$\langle\langle -, - \rangle\rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad \langle\langle (a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3) \rangle\rangle = a_1 b_1 + 2a_2 b_2 + 2a_3 b_3 - a_1 b_2 - a_2 b_1 - a_2 b_3 - a_3 b_2$$

είναι ένα εσωτερικό γινόμενο και να βρεθεί μια ορθοκανονική βάση του Ευκλείδειου χώρου $(\mathbb{R}^3, \langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle)$.

3. [5] Να εξεταστεί αν οι Ευκλείδειοι χώροι $(\mathcal{E}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ και $(\mathbb{R}^3, \langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle)$ είναι ισομετρικά ισομόρφοι. Σε περίπτωση θετικής απάντησης να βρεθεί μια ισομετρία $f : (\mathcal{E}, \langle \cdot, \cdot \rangle) \rightarrow (\mathbb{R}^3, \langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle)$.

Θέμα 7. [25] Θεωρούμε την τετραγωνική μορφή

$$q : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad q(x, y, z) = y^2 + 2xz$$

και έστω A ο πίνακας της q στην κανονική βάση του \mathbb{R}^3 .

1. Να αναχθεί η q στους κύριους άξονες της οι οποίοι και να βρεθούν.
2. Να βρεθεί ορθογώνιος πίνακας P με ορίζουσα 1 έτσι ώστε ο πίνακας ${}^t P A P$ να είναι διαγώνιος.
3. Να βρεθεί μια κυβική ρίζα του A .
4. Να δειχθεί ότι ο ορθογώνιος πίνακας P παριστάνει στροφή επιπέδου (Π) κατά γωνία θ γύρω από άξονα (ϵ) ο οποίος είναι κάθετος στο (Π) . Να βρεθεί το επίπεδο (Π) , ο άξονας (ϵ) , και η γωνία θ .
5. Να βρεθεί το είδος της δευτεροβάθμιας επιφάνειας $\mathcal{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid q(x, y, z) = 1\}$